Lycée M^{ed} Reda Sloaui
Centre des classes préparatoire
Agadir
Année scolaire : 2004/2005

Devoir libre $n°2$
à rendre le 22/11/2004

Exercice 1

Soit f une fonction de classe C^2 de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ telle que : $f(a) = f(b) = 0$
Montrer que :
$$(\forall x \in [a,b])\ (\exists c \in]a,b[) \text{ tel que : } f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$$
(On pourra considérer, pour tout $x \in]a,b[$, la fonction :
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [a,b] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(t) - \frac{A}{2}(t-a)(t-b) \end{array}$$
avec $A = \frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}$)

Exercice 2

Décomposer le polynôme $P(x) = x^4 + 12x - 5$ en un produit de deux trinômes (polynômes de degré 2) sachant qu'il admet deux racines distinctes α et β dont la somme est 2.

Exercice 3

Soit n un entier natirel non nul et θ un réel. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $(x \sin\theta + \cos\theta)^n$ par $x^2 + 1$.

Problème

On cherche à déterminer une fonction f de $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, qui soit continue sur $\mathbf{R}^+$, dérivable et de dérivée continue sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, et telle que :
$$(1) \quad \forall x \geq 0, \quad f(x^2) = [f(x)]^2$$

1. a) Montrer que $\forall x \geq 0$, $f(x) \geq 0$
   b) Quelles sont les fonctions constantes qui peuvent convenir ?
2. Soit $a \in]0,1[$. On considère la suite $u_n = f(a^{2^n})$ pour $n \geq 0$. On suppose f solution du problème.
   a) Montrer que cette suite est convergente. Quelle est sa limite ?
   b) Montrer que $f(a)$ ne peut pas être supérieure à 1.
   c) Montrer que si $f(a) = 1$, la fonction f est constante sur $[0,1]$.
   d) Que dire de $f(a)$ si f est non constante sur $[0,1]$? Que veut alors $f(0)$?

3. On suppose toujours $a \in]0,1[$. On considère la suite $v_n = f(a^{2^{-n}})$ pour $n \geq 0$.
   a) Montrer que cette suite est convergente. Quelle est sa limite ?
   b) Montrer que si $f(a) = 1$, la fonction f est constante.
   c) On suppose f non constante ? Que veut alors $f(1)$?
4. On suppose f non constante.
   a) Montrer que $f(x) \neq 0, \forall x > 0$.
   b) On pose alors $g(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}$. Exprimer $g(x^2)$ en fonction de $g(x)$.
   c) Montrer que la fonction g est constante.
   d) En déduire toutes les fonctions f solution du problème.

••••••••••